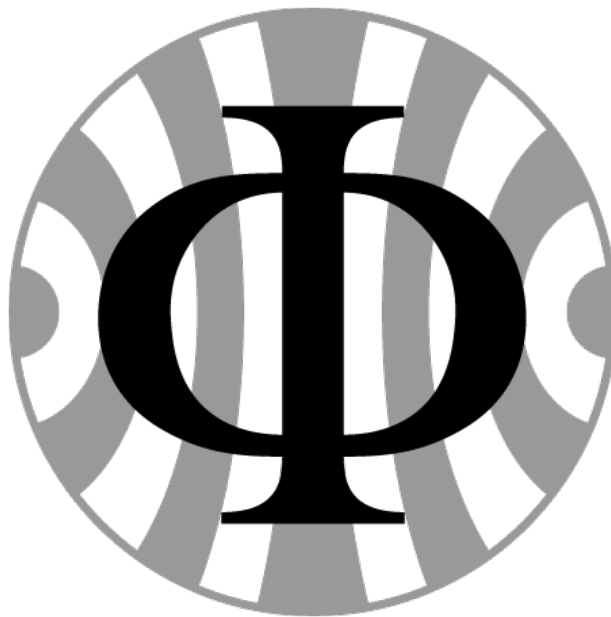


Versuch 243 – Thermisches Rauschen

PAP 2.2, [1]

04.12.2024



[2]

Teilnehmender Student: **Jonathan Rodemers**

Gruppe des Teilnehmenden: 1

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Messverfahren	1
1.3	Grundlagen aus der Physik	1
2	Durchführung	3
2.1	Versuchsaufbau	3
2.2	Messprotokoll	3
3	Auswertung	4
3.1	Frequenzband	4
3.2	Numerische Integration	5
3.3	Bestimmung der Boltzmannkonstante	5
4	Zusammenfassung und Diskussion	7
5	Anhang	8
	Quellen- und Literaturverzeichnis	11

1. Einleitung

1.1 Motivation

Die Messung und Analyse von Rauschsignalen spielen in der experimentellen Physik eine essenzielle Rolle, da das Rauschen die ultimative Grenze der Messgenauigkeit bestimmt. Ziel dieses Experiments ist es, die Boltzmannkonstante k mit hoher Präzision zu bestimmen und dabei das physikalische Phänomen des thermischen Rauschens zu untersuchen.

1.2 Messverfahren

Die Messung basiert auf der experimentellen Bestimmung der Effektivspannung des thermischen Rauschens über einem Widerstand. Dazu wird ein Verstärkersystem mit definiertem Frequenzgang eingesetzt, um das sehr geringe Rauschsignal messbar zu machen. Die Schritte im Experiment sind:

1. **Messung der Rauschspannung** für verschiedene Widerstände bei Raumtemperatur mittels eines rauscharmen Verstärkers mit einer Verstärkung von 1000 (60 dB).
2. **Bestimmung des Frequenzgangs** des Messsystems mit einem Funktionsgenerator und einem Oszilloskop zur Charakterisierung der Bandbreite B .
3. **Berechnung der Boltzmannkonstante** mit der Nyquist-Formel unter Berücksichtigung des Eigenrauschens des Verstärkers.

Das Experiment nutzt verschiedene Widerstände, einen Bandpassfilter zur Begrenzung der Messbandbreite und eine computergestützte Datenauswertung zur genauen Bestimmung der Rauschparameter.

1.3 Grundlagen aus der Physik

Das thermische Rauschen, auch als Johnson- oder Nyquist-Rauschen bezeichnet, tritt in jedem elektrischen Widerstand auf und ist eine Folge der thermischen Bewegung der Ladungsträger. Die zeitlich gemittelte Spannung über dem Widerstand verschwindet:

$$\langle U_r \rangle = 0$$

Daher wird das Rauschen durch seinen Effektivwert (RMS-Wert) beschrieben:

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r^2(t) dt} \quad (1.1)$$

Nach der Nyquist-Formel ergibt sich für die quadratische Effektivspannung des Rauschens:

$$\langle U_r^2 \rangle = 4kTR\Delta f \quad (1.2)$$

wobei

- k die Boltzmannkonstante ist,
- T die absolute Temperatur in Kelvin,

- R der elektrische Widerstand,
- Δf die Messbandbreite des Systems.

Da das Messsystem eine endliche Bandbreite besitzt, wird die äquivalente Rauschbandbreite B bestimmt:

$$B = \int_0^\infty g(f)^2 df \quad (1.3)$$

wobei $g(f)$ der experimentell bestimmte Frequenzgang der Messapparatur ist. Die experimentelle Bestimmung von k erfolgt schließlich über die Beziehung:

$$k = \frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{4RBT} \quad (1.4)$$

mit $\langle U_{aus}^2 \rangle$ als gemessene Rauschspannung am Ausgang des Verstärkers und $\langle U_V^2 \rangle$ als Eigenrauschen des Verstärkers.

In einem weiteren Schritt kann durch die Messung des Widerstandsrauschens in Abhängigkeit der Temperatur die Boltzmannkonstante erneut überprüft und der absolute Nullpunkt experimentell abgeschätzt werden. Dazu wird das Verhalten der temperaturabhängigen Widerstandsänderung eines Pt4000-Widerstands berücksichtigt:

$$R(T) = R_0(1 + AT + BT^2) \quad (1.5)$$

mit den bekannten Konstanten $A = 3,908 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ und $B = 5,775 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-2}$. Die Temperatur wird dann aus dem gemessenen Widerstandswert bestimmt:

$$T(R) = \frac{-R_0A + \sqrt{R_0^2A^2 - 4R_0B(R_0 - R)}}{2R_0B} \quad (1.6)$$

Mit dieser experimentellen Methode wird die Boltzmannkonstante weiter überprüft..

2. Durchführung

2.1 Versuchsaufbau



Abbildung 2.1: Versuchsaufbau

2.2 Messprotokoll

05.03.25 Versuch 243 Jonathan Rothmann
 Messprotokoll Marvin Sengen

Geräte:

- Batterie mit Kabel
- Zimmertemperatur
- Widerstände
- Rauschen Verstärker
- Dämpfungsglied
- Ozi mit Spektralanalyse
- Funktionsgenerator
- Multimeter
- PC

Aufg. 1:
 → drucke noch größer, wie es nach der Formel zu erwarten war: $4kRT$

Aufg. 2:
 $(22,4 \pm 0,5)^\circ\text{C}$

Aufg. 3:
 $D = 0,001 \pm 0,2\%$

Thane
 05.03.2025

3. Auswertung

3.1 Frequenzband

Das zu untersuchende Frequenzband wurde mithilfe der Circuit Analyser Funktion am PC gemessen und die Messdaten anschließend mit Python geplottet. Es ergibt sich folgendes Bild:

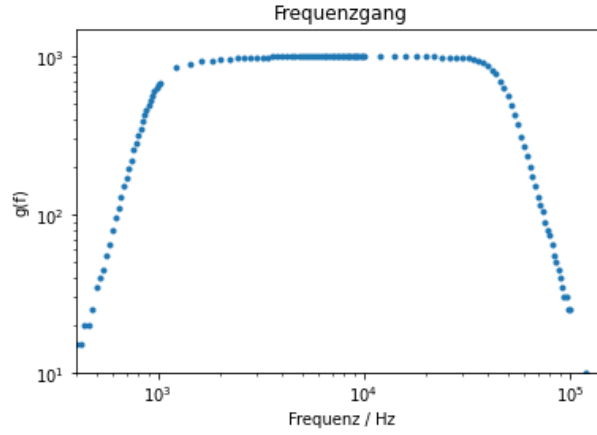


Abbildung 3.1: Frequenzgang

Diese Kurve kann man analytisch beschreiben indem, man die Formel:

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + 1/(f/\Omega_1)^{2n_1}} \sqrt{1 + 1/(f/\Omega_2)^{2n_2}}} \quad (3.1)$$

an die Messdaten fittet, dabei ist V die Verstärkung und die Ω 's die jeweiligen Grenzfrequenzen der *-Passfilter.

Für einen besseren Fit beschneiden wir die Daten noch an den Enden und erhalten dann folendes Diagramm:

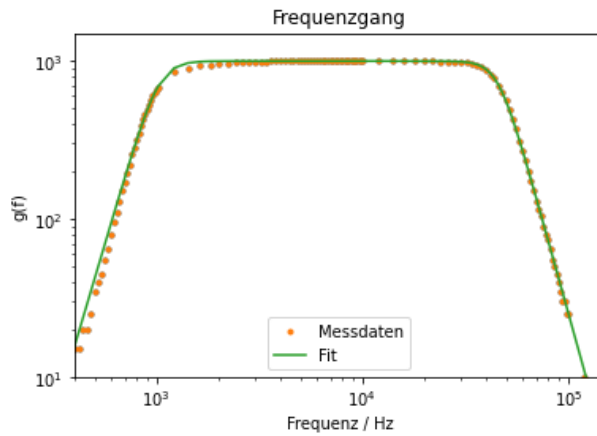


Abbildung 3.2: Frequenzgang mit Fit

Aus dem Fit könne wir auch die Verstärkung auslesen, die sich auf

$$v = 996 \pm 2$$

beläuft.

3.2 Numerische Integration

Nach der Formel 1.3 können wir den Faktor B über das Integral bestimmen. Wir führen also in Python eine numerische Iteration mit der gefitteten Funktion und unseren Messdaten durch und erhalten so für den Faktor B den Wert:

$$B = (45,4 \pm 0,9) \text{ GHz}$$

Dabei wurde der Fehler von B gegeben mit $\pm 2\%$.

3.3 Bestimmung der Boltzmannkonstante

Stellen wir die Formel 1.4 um, so erhalten wir:

$$c = 4kTB \quad (3.2)$$

Wobei c gerade die Steigung einer Geraden ist, die den korrigierten SpannungsRMS-Wert gegen die Widerstandsgröße abbildet.

Wir müssten also zuerst den SpannungsRMS korrigieren (Diff), mit der Rauschspannung des Verstärkers selbst:

$$Diff = \langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle \quad (3.3)$$

mit dem Fehler:

$$\Delta Diff = \sqrt{(2U_{aus}\Delta U_{aus})^2 + (-2U_V\Delta U_V)^2} \quad (3.4)$$

Dann Plotten wir Diff gegen die Widerstandswerte und erhalten daraus die Steigung c : Es ergibt sich folgendes Bild:

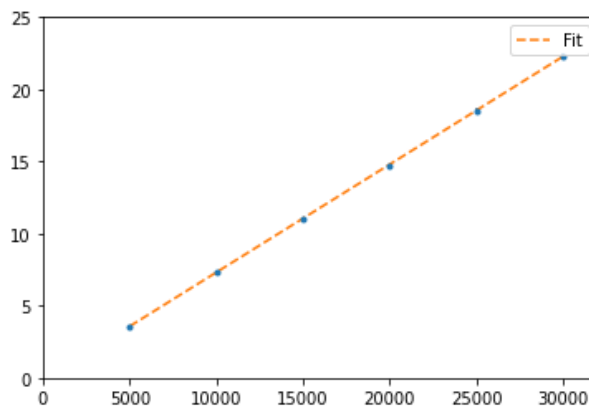


Abbildung 3.3: Diff vs. R

Die hieraus bestimmte Steigung ist:

$$c = (7,477 \pm 0,017)10^{-4} \text{ mV}^2\Omega^{-1}$$

Nun kann man mit der Formel:

$$k = \frac{c}{4TB} \quad (3.5)$$

Mit dem statistischen Fehler:

$$\Delta_{stat} = \sqrt{\left(\frac{1}{4BT}\Delta c\right)^2 + \left(\frac{-c}{4BT^2}\Delta T\right)^2} \quad (3.6)$$

und dem systematischen Fehler:

$$\Delta_{sys} = \frac{-c}{4B^2T}\Delta B \quad (3.7)$$

Damit ergibt sich also für die Boltzmannkonstante:

$$k = (1,405 \pm_{stat} 0.003 \pm_{sys} 0.028) \cdot 10^{-23} \text{JK}^{-1}$$

Dabei hat der Lineare Fit eine Wahrscheinlichkeit von nahezu 100% und ein reduziertes χ^2 von ca. 0,081.

Ein Vergleich mit dem Literaturwert (Taschenrechner) der Boltzmannkonstante zeigt lediglich eine Abweichung von 0,8 σ . Die Messung was also recht präzise.

4. Zusammenfassung und Diskussion

Im durchgeführten Experiment wurde die Boltzmannkonstante k mit Hilfe des thermischen Rauschens bestimmt. Dazu wurde die Rauschspannung für verschiedene ohmsche Widerstände gemessen und unter Berücksichtigung der Nyquist-Formel ausgewertet. Der Frequenzgang des Verstärkers und Bandpassfilters wurde zunächst experimentell ermittelt, indem eine Frequenzgangmessung durchgeführt und die Daten durch eine analytische Funktion gefittet wurden. Dabei ergab sich eine Verstärkung von $v = 996 \pm 2$, was eine präzise Übereinstimmung mit der theoretisch erwarteten Verstärkung von 1000 zeigt. Der Faktor B wurde durch numerische Integration der gefitteten Funktion bestimmt und ergab $B = (45,4 \pm 0,9) \text{GHz}$, wobei die Fehlerabschätzung mit $\pm 2\%$ gegeben wurde.

Zur eigentlichen Bestimmung der Boltzmannkonstante wurde die quadratische Effektivspannung der gemessenen Rauschsignale um das Eigenrauschen des Verstärkers korrigiert, und die resultierenden Werte wurden gegen die Widerstände aufgetragen. Der lineare Fit dieser Daten lieferte eine Steigung von $c = (7,477) \cdot 10^{-4} \text{ mV } \Omega^{-1}$, was schließlich zur Berechnung der Boltzmannkonstante führte:

$$k = (1,405 \pm_{\text{stat}} 0.003 \pm_{\text{sys}} 0.028) \cdot 10^{-23} \text{JK}^{-1}$$

Der statistische Fehler wurde über die Unsicherheiten von c und der Temperatur T berechnet, während der systematische Fehler aus der Unsicherheit des B 's resultierten. Die geringe Abweichung vom Literaturwert ($0,8 \sigma$) zeigt, dass die Messung eine hohe Präzision erreicht hat. Auch das reduzierte χ^2 von nur 0,081 mit einer Fit-Wahrscheinlichkeit von nahezu 100% bestätigt die Qualität der linearen Anpassung der Messdaten.

Dennoch gibt es verschiedene Fehlerquellen, die das Ergebnis beeinflussen haben könnten. Eine der größten Unsicherheiten besteht in der Messung der Verstärkung des Verstärkers und dessen Eigenrauschen, da kleinste Schwankungen in der Kalibrierung große Auswirkungen auf die Endwerte haben können. Zudem könnte eine unzureichende Abschirmung des Messaufbaus externe Störsignale in das Messsignal eingebracht haben. Zudem die Kabel selbst auch ein eigenes Rauschen induzieren.

Insgesamt war das Experiment ein Erfolg, da es gelungen ist, die Boltzmannkonstante mit hoher Präzision zu bestimmen. Die geringe Abweichung vom theoretischen Wert und die niedrige Unsicherheit zeigen, dass das Messverfahren zuverlässig ist und eine hohe Messgenauigkeit erreicht wurde.

5. Anhang

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
# Hier Werte Direkt eintragen lol
U_eff = np.array([2.2925,3.0107,3.5562,4.0488,4.4453,4.904])
U_aus2=np.array([2.2971, 3.0053,3.5697,4.053,4.4991,4.8974])
Delta_U_aus=np.array([0.00946, 0.0114,0.0134,0.014,0.0185,0.0181])
#N = 100 \pm 2
U_V=1.3045
Delta_U_V= 0.00828
```

```
f, U_aus =np.loadtxt('data/breitbandfilter..txt', skiprows=1, usecols=(0,1), unp
```

```
D=1e-3
U_ein=0.2
g=U_aus/(U_ein * D)
```

```
plt.loglog(f,g, linestyle='None', marker='.')
plt.axis([4E2, 1.5e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')
```

```
#ZUgeschnitte Daten
```

```
#Werte Begrenzen
```

```
a=15
```

```
b=-43
```

```
# Die werte passen so schon ganz gut
```

```
plt.loglog(f[a:b],g[a:b], linestyle='None', marker='.')
plt.axis([4E2, 1.5e5, 10, 1.5E3])
```

```
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')

from scipy.optimize import curve_fit
def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))

p0 = [1000 , 1000 , 50000 , 5 , 5]
popt, pcov = curve_fit(fit_func , f[a:b] , g[a:b] ,p0)

plt.loglog(f[a:b],g[a:b] , linestyle='None' , marker='.',
label='Messdaten')
plt.loglog(f , fit_func(f , *popt) , label='Fit')
plt.axis([4E2, 1.5e5 , 10, 1.5E3])
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')
plt.legend(loc='best')

print("Verstärkung=", popt[0])
print("Fehler davon=", np.sqrt(pcov[0,0]))
```

```
import scipy.integrate as integrate
def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2
B=integrate.quad(fit_func_square , f[a] , f[b] , args=tuple(popt))
print('Das Integral betraegt: {value:.4e}'.format(value=B[0]))
```

```
R=np.array([5e3 , 10e3 , 15e3 , 20e3 , 25e3 , 30e3])
#U_aus=np.array([Ihre Werte])
#fehler_U_aus=np.array([Ihre Werte])
#U_V=Ihr Wert
D=U_aus**2-U_V**2
fehler_D=np.sqrt(((2*U_aus2)*Delta_U_aus)**2 + ((-2*U_V)*Delta_U_V)**2)
plt.errorbar(R, D, yerr=fehler_D , fmt='.')
plt.axis([0,3.2e4,0,25])
```

```
def linear(x,c,t):
    return c*x +t
popt, pcov = curve_fit(linear, R,D)
print("Steigung=",popt[0], "  $\pm$  ", np.sqrt(pcov[0,0]) )
plt.plot(R, linear(R,popt[0],popt[1]), linestyle="dashed", label="Fit" )
plt.legend()
plt.show()

chisquare=np.sum((( linear(R,*popt)-D)**2/fehler_D**2))
dof=5 #degrees of freedom
chisquare_red=chisquare/dof
print("Chisqr_red=",chisquare_red)

from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit="+str(prob)+"%")
```

Quellen- und Literaturverzeichnis

- [1] CAPTAIN JONI: *pap1-tex-vorlage*. <https://github.com/captain-joni/pap1-tex-vorlage>. – [Online; Stand 28.08.2024]
- [2] DR. J. WAGNER: *Physikalisches Praktikum 1 für Studierende der Physik B.Sc.* <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/PAP1.pdf>. – [Online; Stand 01/2014]